数理解析研究所講究録
488巻 1983年 83-88

Purely infinite simple C^*-algebra の projection space と K-groups について

愛媛大 理 坂上鉄郎 (Jetsuro Sakaue)

§1 $\mathfrak{A}$ は C^*-algebra with unit とする。 $\mathfrak{A}$ の projection space を $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$ とし, unitary space を $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ とする。
$P, Q \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$ について 次の3つの関係を考える。

(1) P と Q は $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$ 内の arc で結べる。

(2) $P \overset{U}{\sim} Q$, すなわち $^\exists U \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$ s.t. $U^*PU = Q$

(3) $P \sim Q$, すなわち $^\exists V \in \mathfrak{A}$ s.t. $V^*V = P$, $VV^* = Q$

一般に (2)⇒(3) は自明で. (1)は $P \overset{S}{\approx} Q$, すなわち有限個の $U_i \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$, $U_i^* = U_i$ が存在して $(U_1 \cdots U_n)P(U_n \cdots U_1) = Q$ と同値である事が. S. Maeda [4] で示されているから、(1)⇒(2) である。 特に $\mathfrak{A}$ が AW^*-algebra ならば, (1)と(2)は同値 ([4]), さらに finite であれば (1),(2), (3)は全て同値である ([4])。

ここでは. $\mathfrak{A}$ が purely infinite simple の場合にも, $P \neq 1$, $Q \neq 1$ の時 (1),(2),(3)が 同値なる事を示し. さらに その系

として，$K_0(\mathfrak{A})$と$\mathcal{P}(\mathfrak{A})$のcomponent全体から孤立点，$\{0\}$，$\{1\}$を除いたもの全てが1対1に対応する事を，J. Cuntz [3]の結果を用いて示す。又，purely infinite simple C^*-algebraについてのいくつかのremarkを述べる。

$p \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$がinfiniteとは$p \sim p' < p$なる$p'$が存在する時を言い，$1$がinfiniteの時$\mathfrak{A}$はinfiniteであると言う。infinite projectionの全体を$\mathcal{P}_\infty(\mathfrak{A})$と書く。$\mathfrak{A}$をinfinite simpleとする時次の結果がJ. Cuntz [2]，[3]で示されている。

<u>Lemma 1.1.</u> $^\forall p \in \mathcal{P}_\infty(\mathfrak{A})$についてprojectionの列$\{p_i\}_{i \in N}$で$p_i \sim p$，$p_i p_j = 0$ $(i \neq j)$ $p_i < p$ $(i, j \in N)$なるものが存在する。

<u>Lemma 1.2.</u> $p \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$，$Q \in \mathcal{P}_\infty(\mathfrak{A})$とする時$p \sim p' < Q$かつ$Q - p' \in \mathcal{P}_\infty(\mathfrak{A})$となる$p'$が存在する。

ところでJ. Cuntzは[2]において$\mathcal{S}_\infty(\mathfrak{A})$というgroupを次のように定義している。$\mathcal{P}_\infty(\mathfrak{A})$を同値関係$\sim$で分類したものを$\mathcal{P}_\infty(\mathfrak{A})/\sim$とする。$[p]$，$[Q] \in \mathcal{P}_\infty(\mathfrak{A})/\sim$について$[p] + [Q] = [p' + Q']$ $p \sim p'$，$Q \sim Q'$ $p'Q' = 0$（p'，Q'の存在はLemma 1.1.より分かる）として算法を定義するとgroupとなり，これを$\mathcal{S}_\infty(\mathfrak{A})$と定義する（[2]）。この時$K_0(\mathfrak{A}) \cong \mathcal{S}_\infty(\mathfrak{A})$である（[3]）。

§2　まず (2) と (3) の同値性を示す。一般に
$p \overset{U}{\sim} Q \Leftrightarrow p \sim Q$ かつ $1-p \sim 1-Q$ である事に注意する。

<u>Definition ([3])</u>　C^*-algebra $\mathfrak{A}$ が purely infinite であるとは全ての non zero positive H について $\overline{H\mathfrak{A}H}$ の中に infinite projection が存在する事を言う。

従って $\mathfrak{A}$ が purely infinite simple の時 $\mathcal{P}(\mathfrak{A})-\{0\}=\mathcal{P}_\infty(\mathfrak{A})$ だから. $\mathcal{S}_\infty(\mathfrak{A})$ が group であるという事を用いると次の事が示される。

<u>Proposition 2.1.</u>　$\mathfrak{A}$; purely infinite simple C^*-algebra
$p, Q \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$ $p \neq 1$, $Q \neq 1$, について $p \sim Q \Leftrightarrow p \overset{U}{\sim} Q$.

以後 $\mathfrak{A}$ は全て purely infinite simple とする。$\mathcal{U}_0(\mathfrak{A})$ を $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ における 1 の component とする。さらに $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$ について. $U_1 U_2^{-1} \in \mathcal{U}_0(\mathfrak{A})$, すなわち U_1 と U_2 が $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ 内の arc で結べる時 $U_1 \overset{arc}{\sim} U_2$ と書く。

<u>Lemma 2.2. ([3])</u>　$U \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$ とする時 次の(*)を満足する non-zero positive H が存在する。

(*)　$\forall p' \in \mathcal{P}(\overline{H\mathfrak{A}H})$ に対して. $U \overset{arc}{\sim} U' + p'$ となる
$U' \in \mathcal{U}((1-p')\mathfrak{A}(1-p'))$ が存在する。

<u>Lemma 2.3.</u>　$\forall p \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$ $(p \neq 1, 0)$ $\forall U \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$ に対し
$p \sim Q$ かつ $U \overset{arc}{\sim} V + 1 - Q$ となる $Q \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$, $V \in \mathcal{U}(Q\mathfrak{A}Q)$ が存在する。

ところで J. Cuntz [3] により $K_1(\mathfrak{A}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{A})/\mathcal{U}_0(\mathfrak{A})$ なる事が示されているので次の事が分かる。

<u>Lemma 2.4.</u> $\mathcal{U}(\mathfrak{A})/\mathcal{U}_0(\mathfrak{A})$ は abelian である。

<u>Lemma 2.5.</u> $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$ $P \neq 0$ とする。$\forall U \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$ に対し $U \overset{arc}{\sim} V + 1 - P$ となる $V \in \mathcal{U}(P\mathfrak{A}P)$ が存在する。

<u>Theorem 2.6.</u> $P, Q \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$ について $P \neq 1$, $Q \neq 1$ の時次の(1), (2), (3)は同値である。

(1) P と Q は $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$ 内の arc で結べる。

(2) $P \overset{u}{\sim} Q$

(3) $P \sim Q$

§1 で述べたように $K_0(\mathfrak{A}) \cong \mathcal{S}_\infty(\mathfrak{A})$ を用いるとさらに次の事が分かる。

<u>Corollary 2.7.</u> $K_0(\mathfrak{A})$ と $\mathcal{P}(\mathfrak{A}) - \{0, 1\}$ の component 全体は1対1に対応する。

これに呼応するものとして、$K_1(\mathfrak{A}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{A})/\mathcal{U}_0(\mathfrak{A})$ だから、$K_1(\mathfrak{A})$ と $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ の component 全体が1対1に対応する事実がある。

<u>Corollary 2.8.</u> Cuntz-algebra $\mathcal{O}_n$ について、$\mathcal{P}(\mathcal{O}_n)$ の component の数は $n+1$ 個である。($n = 2, 3, \cdots$)

§3 ここでは purely infinite simple C^*-algebra

に関するいくつかの remark を述べる。

Proposition 3.1. $\mathfrak{A}$: infinite simple C^*-algebra with unit. とする時、次の(1), (2), (3)は同値である。

(1) $\mathfrak{A}$: purely infinite

(2) 任意の non-zero positive H に対して $XHX^* = 1$ となる $X \in \mathfrak{A}$ が存在する。

(3) 任意の non-zero な $A \in \mathfrak{A}$ に対して、$XAY = 1$ となる $X, Y \in \mathfrak{A}$ が存在する。

Proposition 3.2. $\mathfrak{A}$: purely infinite simple C^*-algebra with unit とし、$\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{A}$ の hereditary C^*-sub-algebra とする。この時 $\mathfrak{B}$ は purely infinite simple C^*-algebra である。

Proposition 3.3. $\mathfrak{A}$: simple C^*-algebra with unit とする時 次の(1), (2)は同値である。

(1) $\mathfrak{A}$: purely infinite

(2) $\mathcal{K} \otimes \mathfrak{A}$; purely infinite

ただし、$\mathcal{K}$ は infinite dimentional separable Hilbert space 上の compact operator 全体のなす C^*-algebra である。

参考文献

[1] J. Cuntz, Simple C^*-algebras generated by isometries, Commun. Math. Phys. 57 (1977), 173–185.

[2] J. Cuntz, Murray-von Neumann equivalence of projections in infinite simple C^*-algebras, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 23 (1978), 1011-1014.

[3] J. Cuntz, K-theory for certain C^*-algebras, Ann. of Math., 113 (1981), 181-197.

[4] S. Maeda, On arcs in the space of projections of a C^*-algebra, Math. Japonicae, 21 (1976), 371-374.